1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji

(a) $f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$.

(b) $f(x,y) = \ln\frac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}$.

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2}$.

(c) $f(x,y,z) = \arcsin(x^2+y^2+z^2-2)$.

2. Znaleźć poziomice wykresów funkcji i na ich podstawie naszkicować te wykresy.

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

(c) $f(x,y) = \sin y$.

(c) $f(x,y) = e^{x-y}$.

3. Obliczyć , o ile istnieją, granice funkcji.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{\sin^2 x}{y^2}$.

4. Znaleźć zbiory punktów ciągłości funkcji.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \geqslant 1 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } y \geqslant 0, x \in \mathbb{R}. \\ 1 & \text{dla } y < 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < y \\ e^y & \text{dla } x \geqslant y \end{cases}$

4. Sprawdzić czy istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu we wskazanych punktach.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla} \quad xy = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad xy \neq 0 \end{cases}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(b) $f(x,y,z) = \sqrt[5]{xy(z-1)}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$.

(c) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y}{x^2+y^2+z^2} & \text{dla} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$.

5.Określić dziedzinę, obliczyć pochodne cząstkowe

(a) $f(x,y) = e^{x^2 \sin y}$.

(b) $f(x,y) = \arccos \frac{x}{y}$.

(c) $f(x,y,z) = x^y - z^x$.

(d) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

(e) $f(x,y) = e^{\sin \frac{y}{x}}$.

(f) $f(x,y,z) = \sin(x \cos(y \sin z))$.

6. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu i sprawdzić czy pochodne cząstkowe mieszane są równe.

(a) $f(x,y) = xy + \frac{x^2}{y^3}$.

(b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} xy$.

(c) $f(x,y,z) = e^{3x+4y} \cos 5z$.

7. Zbadać czy równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ zachodzi dla funkcji $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

8. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe.

(a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $f(x,y) = \sin xy$.

(b) $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y}$, $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$.

(c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, $f(x,y,z) = \frac{x^2 y^3}{z}$.